הרצאה מספר 29
אלגברה 1 מ 104016

הנושא: דטרמיננטים
הדטרמיננטה מסדר 2 ותכונותיה

דר. נתן ולך

הטכניון – הפקולטה למתמטיקה

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

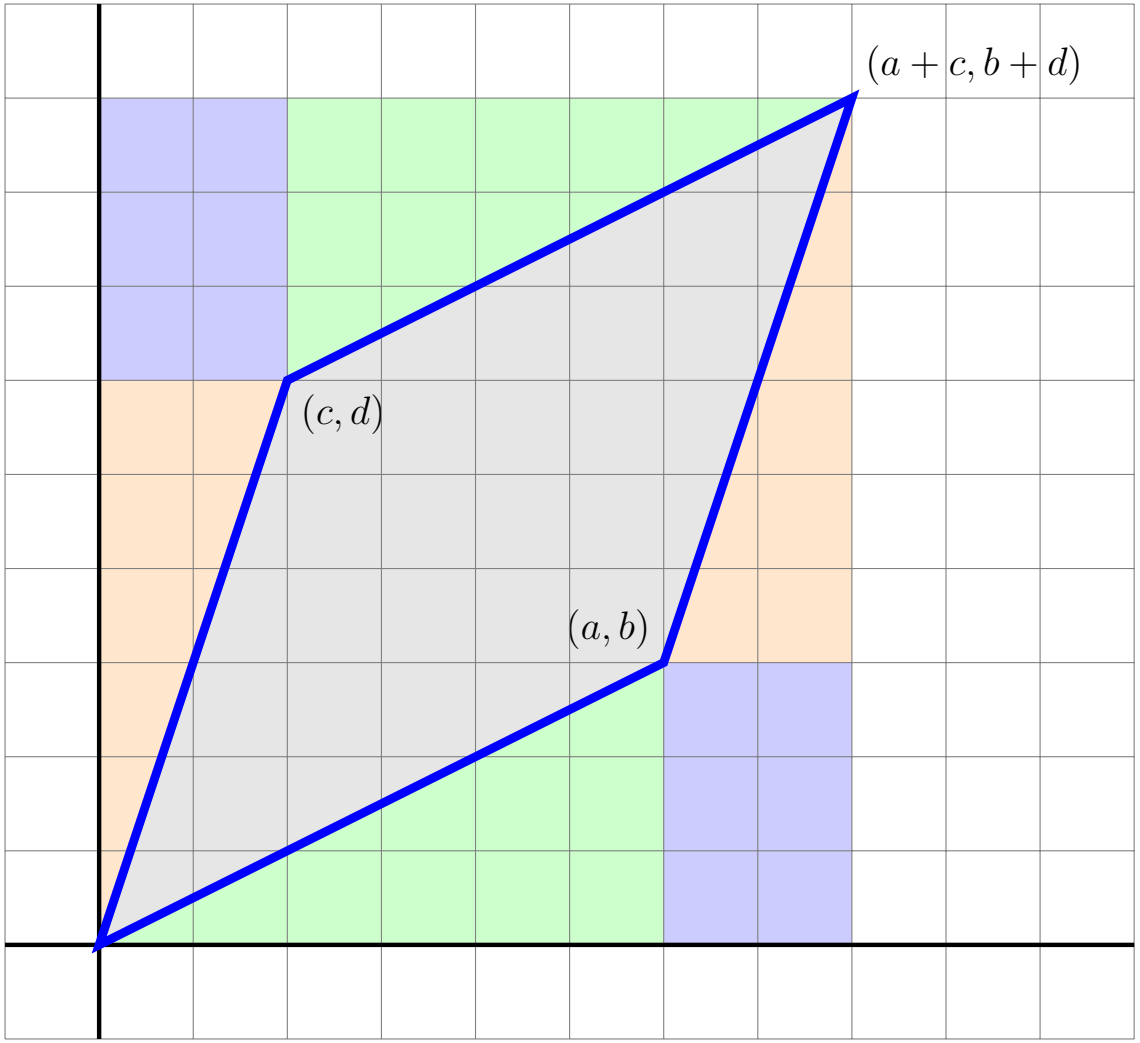
7.1 מוטיבציה להגדרת דטרמיננטה

- אנו נלמד את החומר על דטרמיננטים בצורה טכנית, ובעזרת הגדרה אינדוקטיבית.
- מבחינה מתמטית, ניתן ללמוד את הנושא בצורה אקסיומטית:
  - לרשום רשימה של אקסיומות רצויות על פונקצית הדטרמיננטה (כפונקציה של n וקטורים ב־ F^n).
  - להסיק מהאקסיומות תכונות נוספות, כולל יחידות של הפונקציה שמקיים את האקסיומות.
  - להראות שהפונקציה היא אותה פונקציה שאנו ניתן כהגדרה של הדטרמיננטה.
- ניתן לקרוא על הגישה האקסיומטית בספר Calculus: Volume II (second edition) של Tom M. Apostol.
- מבחינתו, הרעיון המנחה תהיה שפונקצית הדטרמיננטה מודדת שטח / נפח של מקביליות.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.1 מוטיבציה להגדרת דטרמיננטה

- מדידת שטח של מקבילית:



$$
\begin{aligned}
A &= (a+c)\cdot(b+d) \\
&- ab \\
&- cd \\
&- 2bc \\
&= ad - bc \\
&= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

אם היינו מחליפים את התפקידים של (a, b) ו־ (c, d), הסימן היה מתחלף.

לכן, צריך לקחת ערך מוחלט כאשר מחשבים שטח בעזרת דטרמיננטה.

אין צורך לחשב "גובה" של המקבילית יחסית ל"בסיס".

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.2 הגדרת דטרמיננטה מסדר 2 ודוגמאות

- **הגדרה:** הדטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר 2 נתונה על ידי הנוסחה:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- **דוגמה:**

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} = 2 \cdot 15 - 5 \cdot 6 = 0$$

$$\det(I_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

החלפת שורות

$$\det\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = c \cdot b - d \cdot a = -\det(A)$$

החלפת עמודות

$$\det\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = b \cdot c - a \cdot d = -\det(A)$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.2 הגדרת דטרמיננטה מסדר 2 ודוגמאות

- $$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- **דוגמה:**

כפל שורה בסקלר
$$\det\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha a \cdot d - \alpha b \cdot c = \alpha \det(A)$$

כפל עמודה בסקלר
$$\det\begin{pmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{pmatrix} = \alpha a \cdot d - b \cdot \alpha c = \alpha \det(A)$$

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} a+\alpha & b+\beta \\ c & d \end{pmatrix} &= (a+\alpha)\cdot d - (b+\beta)\cdot c \\ &= (ad - bc) + (\alpha d - \beta c) \\ &= \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

שורה שבה יש סכום של שתי וקטורים

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.3 תכונות הדטרמיננטה

תכונות: (בינתיים למקרה 2×2)

1. $\det(I) = 1$
2. $\det(A^t) = \det(A)$
3. **החלפת שתי שורות מכפילה את הדטרמיננטה ב־ (-1) (מחליפה את הסימן).**

   החלפת שתי עמודות מכפילה את הדטרמיננטה ב־ (-1) (מחליפה את הסימן).
4. **כפל שורה בסקלר α מכפילה את הדטרמיננטה ב־ α.**

   כפל עמודה בסקלר α מכפילה את הדטרמיננטה ב־ α.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

תכונות: (בינתיים למקרה 2×2)

1. $\det(I) = 1$
2. $\det(A^t) = \det(A)$
3. החלפת שתי שורות/עמודות מחליפה את סימן הדטרמיננטה.
4. כפל שורה/עמודה בסקלר α מכפילה את הדטרמיננטה ב־ α.
5. כאשר מסתכלים על הדטרמיננטה כפונקציה של השורות

$$\det(A_{1\cdot}, A_{2\cdot}, \ldots, A_{n\cdot})$$

יש לינאריות בכל שורה (בנפרד). כלומר אם $A_{i\cdot} = \vec{b} + \vec{c}$ אז $\det A = \det B + \det C$ כאשר B מתקבל מ־ A על ידי רישום $\vec{b}$ במקום שורה i, ו־ C מתקבל מ־ A על ידי רישום $\vec{c}$ במקום שורה i.

למשל: $\det(\vec{b} + \vec{c}, A_{2\cdot,\ldots}) = \det(\vec{b}, A_{2\cdot}, \ldots) + \det(\vec{c}, A_{2\cdot}, \ldots)$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.3 תכונות הדטרמיננטה

תכונות: (בינתיים למקרה 2×2)

1. $\det(I) = 1$
2. $\det(A^t) = \det(A)$
3. החלפת שתי שורות/עמודות מחליפה את סימן הדטרמיננטה.
4. כפל שורה/עמודה בסקלר α מכפילה את הדטרמיננטה ב־ α.
5. $\det(\vec{b} + \vec{c}, A_{2\cdot,\ldots}) = \det(\vec{b}, A_{2\cdot}, \ldots) + \det(\vec{c}, A_{2\cdot}, \ldots)$
   ובאופן דומה בשורות אחרות.
6. $\det(B \cdot A) = \det(B) \cdot \det(A)$

ניתן להוכיח למקרה של מטריצות 2×2 בעזרת חישוב מפורש.

7. אם שורות/עמודות ת"ל אז הדטרמיננטה היא 0.
   מקרה פרטי: שתי שורות/עמודות שוות.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.3 תכונות הדטרמיננטה

תכונות: (בינתיים למקרה 2×2)

1. $\det(I) = 1$
2. $\det(A^t) = \det(A)$
3. החלפת שתי שורות/עמודות מחליפה את סימן הדטרמיננטה.
4. כפל שורה/עמודה בסקלר α מכפילה את הדטרמיננטה ב־ α.
5. $\det(\vec{b} + \vec{c}, A_{2\cdot,\ldots}) = \det(\vec{b}, A_{2\cdot}, \ldots) + \det(\vec{c}, A_{2\cdot}, \ldots)$
   ובאופן דומה בשורות אחרות.
6. $\det(B \cdot A) = \det(B) \cdot \det(A)$
7. אם שורות/עמודות ת"ל אז הדטרמיננטה היא 0.
8. דטרמיננטה של מטריצה משולשת היא מכפילת אברי האלכסון.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

הוכחת $\det(B \cdot A) = \det(B) \cdot \det(A)$ **למקרה** 2×2

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det(B \cdot A) &= (\alpha a + \beta c) \cdot (\gamma b + \delta d) - (\alpha b + \beta d) \cdot (\gamma a + \delta c) \\
&= \alpha\gamma ab + \alpha\delta ad + \beta\gamma bc + \beta\delta cd \\
&\quad -(\alpha\gamma ab + \alpha\delta bc + \beta\gamma ad + \beta\delta cd) \\
&= (\alpha\delta - \beta\gamma) \cdot (ad - bc) \\
&= \det(B) \cdot \det(A)
\end{aligned}$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.4 הדטרמיננטה ופעולות שורה/עמודה אלמנטריות

- נניח שהמטריצה B מתקבלת מ־ A על ידי הפעלת פעולת שורה או עמודה אלמנטרית אחד.

1. אם הפעולה היא **החלפת** שתי שורות או שתי עמודות:

$$\det B = -\det A$$

2. אם הפעולה היא **הכפלת** שורה או עמודה בסקלר α: $(\alpha \neq 0)$

$$\det B = \alpha \det A$$

3. אם הפעולה היא **חיבור** כפולה של שורה/עמודה לשורה/עמודה **אחרת**:

$$\det B = \det A$$

- רק המקרה האחרונה חדשה.

זה נובע מפירוק הסכום ומכך שבמחובר שבו מופיע כפולה של שורה/עמודה בשורה/עמודה שפעלו עליה, השורות/עמודות ת"ל, ולכן הדטרמיננטה היא 0.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.5 תכונות הדטרמיננטה והמטריצה ההופכית

- נניח כי A מסדר 2×2:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2$$

- $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- A הפיכה אם"ם $\det(A) \neq 0$. זה גם נכון ל־ $n > 2$.

- ההכללה של הנוסחה להופכי למקרה $n > 2$ אינה בחומר הקורס:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

(תלוי במושג $\operatorname{adj}(A)$ שנלמד בהמשך.)

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.6 אקסיומות מספיקות להגדרת הדטרמיננטה

אקסיומות מספיקות להגדרה:

1. **(הומוגניות בכל שורה)**
כפל שורה/עמודה בסקלר α מכפילה את הדטרמיננטה ב־ α.

2. **(תכונת החיבור בכל שורה)**
$$\det(\vec{b}+\vec{c}, A_{2\cdot,\ldots}) = \det(\vec{b}, A_{2\cdot}, \ldots) + \det(\vec{c}, A_{2\cdot}, \ldots)$$
ובאופן דומה בשורות אחרות.

3. **(איפוס כאשר יש שורות שוות)**
אם שתי שורות שוות אז הדטרמיננטה היא 0.

4. **(תקנון** standardization**)**
$$\det(I) = 1$$

$\star$ ההוכחה שאלו מספיקות, שיש פונקציה יחידה המקיימת את האקסיומות, ושההגדרה שניתן בקורס זה יוצא מהאקסיומות האלו אינם חלק מקורס זה.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות